Dutch Book

Cociente de apuesta

Una apuesta sobre el evento E es un contrato entre dos agentes A y B que tiene la siguiente forma:

- A se compromete a pagar la cantidad **qS** a B.
- B se compromete a pagar la cantidad **S** a A en caso de que E ocurra y nada si E no ocurre.

q se llama *cociente de apuesta* y S se llama *premio* (stake)

Ejemplo

Juan juega 10 pesos al 23 a la cabeza a la Quiniela.

Al comprar su boleta está haciendo una apuesta porque se realiza un contrato según el cual:

- Juan se compromete a pagar (de hecho paga) 10 pesos a B (en este caso, el Estado) y
- El Estado se compromete a pagar a Juan 700 pesos SI sale el 23 a la cabeza en el próximo sorteo y nada en el caso contrario.

Entonces $10 = qS$, $700 = S$.

Por lo tanto, el cociente de apuesta q es $1/70$.

Miremos la misma situación desde el Estado. Podemos decir que el Estado está apostando a favor **de que no salga el 23 a la cabeza.**

Desde este punto de vista, el Estado se compromete a cobrar 10 pesos (pagar -10 pesos) y a pagar 700 pesos (a cobrar -700 pesos) si sale el 23 a la cabeza.

$qS = -10$, $S = -700$ entonces $q = 1/70$

Desde los dos puntos de vista (apuesta a favor o en contra) el cociente de apuesta q es el mismo y el premio S cambia de signo.

Eligiendo un cociente de apuesta

Supongamos que se nos propone apostar sobre un evento E. ¿Qué cociente de apuesta debemos elegir?

Sabemos que debemos pagar qS y cobraremos S en caso de que E ocurra. En estas condiciones, si sabemos que S es positivo (apostamos a favor de E), nos convendrá elegir un q pequeño para pagar lo menos posible. Sin embargo, si sabemos que S es negativo (apostamos en contra de E) nos convendría elegir un q grande para cobrar lo máximo posible (pagar qS siendo S negativo es lo mismo que cobrar q |S|)

¿Qué q elegir si no sabemos el signo de S?

Supongamos que se nos plantea la siguiente situación: debemos apostar **sobre** la reelección de Obama en EEUU. Podemos elegir el cociente de apuesta pero no S, aunque estamos seguros de que S, tenga el signo que tenga, no representará una suma que ponga en riesgo nuestras finanzas ni será tan pequeña como para que nos resulte indiferente.

S>0		S<0	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago qS	Pago qS	Pago qS (Como S<0, recibo q|S|)	Pago qS (Como S<0, recibo q|S|)
Recibo S	Recibo 0	Recibo S (como S<0, pago |S|)	Recibo 0
Gano S-qS	Gano –qS (como S >0, pago q|S|)	Gano S-qS	Gano –qS>0

S=1		S= -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago q	Pago q	Recibo q	Recibo q
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Recibo 0
Gano 1-q	Pierdo q	Pierdo 1-q	Gano q

Supongamos que estamos bastante más seguros de que Obama será reelecto que de que Romney será electo. Supongamos además que medimos ese grado de confianza con un número. Digamos que el grado de confianza que tenemos en la reelección de Obama es muy parecido al que tenemos en que salga un número mayor o igual que 2 si tiramos un dado justo.

S=1		S= -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago q	Pago q	Recibo q	Recibo q
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Recibo 0
Gano 1-q	Pierdo q	Pierdo 1-q	Gano q

Consideremos distintos valores de q: q=10

S=1		S=-1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 10	Pago 10	Recibo 10	Recibo 10
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Pierdo 9	Pierdo 10	Gano 9	Gano 10

S=1		S=-1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 10	Pago 10	Recibo 10	Recibo 10
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Pierdo 9	Pierdo 10	Gano 9	Gano 10

La tabla muestra que la elección q=10 es inaceptable porque si nos obligan a apostar con S=1 enfrentamos una pérdida segura.

Caso q= -10

S=1		S= -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Recibo 10	Recibo 10	Pago 10	Pago 10
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Recibo 0
Gano 11	Gano 10	Pierdo 11	Pierdo 10

La tabla muestra que la elección q= -10 es inaceptable porque si nos obligan a apostar con S= -1 enfrentamos una pérdida segura.

Caso q= 1

S=1		S = -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 1	Pago 1	Recibo 1	Recibo 1
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Gano 0	Pierdo 1	Gano 0	Gano 1

La tabla muestra que la elección q= 1 es inaceptable porque si nos obligan a apostar con S= 1 no tenemos nada que ganar y existe la posibilidad de perder.

Caso q= 0

S=1		S= -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 0	Pago 0	Recibo 0	Recibo 0
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Gano 1	Gano 0	Pierdo 1	Gano 0

La tabla muestra que la elección q= 0 es inaceptable porque si nos obligan a apostar con S= -1 no tenemos nada que ganar y existe la posibilidad de perder.

Caso q= 1/2

S= 1		S= -1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 0,5	Pago 0,5	Recibo 0,5	Recibo 0,5
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Gano 0,5	Pierdo 0,5	Pierdo 0,5	Gano 0,5

Podría parecer que hemos logrado un equilibrio y q =1/2 es aceptable. Pero en realidad, si nos obligan a apostar con S=-1 no podemos estar conformes, porque nosotros tenemos mayor confianza en la reelección de Obama que en la elección de Romney y la asignación q=1/2, con S=-1 nos obliga a tener mayor confianza en que perderemos 0,5 a la que tenemos en que ganaremos 0,5.

Caso q= 5/6

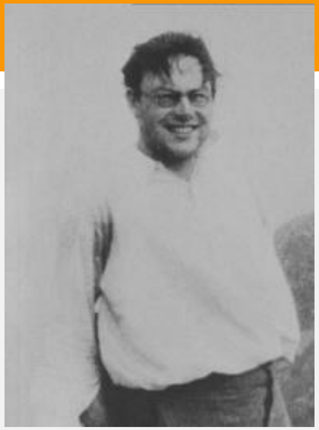
S=1		S=-1	
Obama reelecto	Romney presidente	Obama reelecto	Romney presidente
Pago 5/6	Pago 5/6	Recibo 5/6	Recibo 5/6
Recibo 1	Recibo 0	Pago 1	Pago 0
Gano 1/6	Pierdo 5/6	Pierdo 1/6	Gano 5/6

¿Podemos embarcarnos en la apuesta con S=1? Dado nuestro grado de confianza en que Obama será reelecto, parece razonable hacerlo, aunque sin considerar que la apuesta esté «volcada» a nuestro favor, ya que la ganancia menor se compensa con nuestro elevado grado de confianza en obtenerla. ¿Podemos embarcarnos en la apuesta con S=-1? De nuevo hay un equilibrio entre la ganancia posible y el grado de confianza en obtenerla.

Lo anterior vale en general y es lo que fundamenta la igualación de *cociente de apuesta sobre una proposición* y *grado de creencia en una proposición.*

Coherencia

Definición: Un conjunto de cocientes de apuestas se llama *coherente* si y solo si es imposible elegir un conjunto de premios (S) para apostar de forma que quien sostiene esos cocientes de apuesta sufra una pérdida monetaria segura, es decir, sufra una pérdida monetaria sucedan los eventos que sucedan. Si se encuentran premios de tal forma que quien sostiene los cocientes de apuestas sufrirá una pérdida monetaria segura, se dice que se ha hecho un *Dutch Book* contra él.



Teorema Dutch Book (TDB) (Ramsey - De Finetti)

Un conjunto de cocientes de apuestas es ***coherente*** *si y solo si verifica los axiomas de la probabilidad.*

Para mostrar el TDB tomaremos como axiomas de la probabilidad proposiciones diferentes a las que tomó Kolmogorov pero que se muestra fácilmente que son equivalentes (es decir, estas nuevas proposiciones que tomaremos como axiomas se pueden demostrar a partir de los axiomas de Kolmogorov, y estos se pueden demostrar a partir de las proposiciones que tomaremos como axiomas).

Axiomas de probabilidad II

Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ para todo suceso E
y $P(\Omega)=1$.

Axioma 2: Si $E_1, \ldots, E_n$ son eventos exclusivos y exhaustivos, entonces $P(E_1) + \ldots + P(E_n) = 1$

Axioma 3: $P(E \cap F) = P(E/F)P(F)$

Demostración del TDB

Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$ para todo suceso E y $P(\Omega)=1$.

Debemos demostrar que la condición de coherencia implica el axioma 1 y recíprocamente.

Coherencia $\rightarrow$ Axioma 1.

Sea q(E) el cociente de apuesta para el suceso E. Debemos demostrar que si hay coherencia, entonces $q(\Omega)=1$.

Supongamos $q(\Omega)>1$. Entonces si se elige S>0 tenemos que el apostador paga $q(\Omega)S$ y cobra con seguridad (ya que Ω es el suceso seguro) S. Su ganancia es

$S - q(\Omega)S = S(1-q(\Omega))<0$.

Supongamos $q(\Omega)<1$. Entonces si se elige S<0 tenemos que el apostador cobra $q(\Omega)|S|$ y paga con seguridad (ya que Ω es el suceso seguro) |S|. Su ganancia es

$q(\Omega)|S|-|S| = |S|(q(\Omega)-1) <0$.

Lo anterior demuestra que si el sistema es coherente $q(\Omega)=1$.

Sea E cualquier evento. Si $q(E)>1$ y $S>0$, tenemos los siguientes casos:

E sucede	**E no sucede**
Apostador paga q(E)S	Apostador paga q(E)S
Apostador cobra S	Apostador cobra 0
Apostador gana $S-q(E)S = S(1-q(E))<0$ o sea que pierde $S(q(E)-1)$	Apostador pierde q(E)S

Sea E cualquier evento. Si $q(E)<0$ y $S<0$, tenemos los siguientes casos:

E sucede	**E no sucede**
Apostador paga $q(E)S>0$	Apostador paga $q(E)S>0$
Apostador cobra S (paga $\|S\|$)	Apostador cobra 0
Apostador pierde $\|S\|+q(E)S$	Apostador pierde $q(E)S$

Esto demuestra que para ser coherente, hay que elegir $q(\Omega)=1$ y $0\leq q(E)\leq 1$ para todo evento E.

Axioma 1 $\rightarrow$ Coherencia.

Si $q(\Omega)=1$, sea S positivo o negativo tenemos

Ω sucede (ya que es suceso seguro)

Apostador paga S

Apostador cobra S

Apostador gana 0.

No hay forma de que la ganancia del apostador sea negativa.

Para cualquier evento E, si $0 \leq q(E) \leq 1$, tenemos

S>0		S<0	
E sucede	E no sucede	E sucede	E no sucede
Apostador paga qS	Apostador paga qS	Apostador recibe qS	Apostador recibe qS
Apostador recibe S	Apostador recibe 0	Apostador paga S	Apostador paga 0
Apostador gana S-qS>0	Apostador pierde qS	Apostador pierde S-qS>0	Apostador gana qS

Vemos que no hay forma de hacer que el apostador pierda **pase lo que pase.**

Axioma 2: Si $E_1, \ldots, E_n$ son eventos exclusivos y exhaustivos, entonces $P(E_1) + \ldots + P(E_n) = 1$

El TDB nos dice que un sistema para ser coherente debe cumplir que siendo $E_1, \ldots, E_n$ son eventos exclusivos y exhaustivos, $q(E_1) + \ldots + q(E_n) = 1$.

Coherencia → Axioma 2.

Al ser sucesos exclusivos y exhaustivos, tiene que darse uno y solo uno de ellos. Supongamos que el apostador ha elegido los cocientes $q(E_1), \ldots, q(E_n)$ y se le proponen los premios respectivos $S_1 \ldots, S_n$

Su ganancia si ocurre E_i es: $G_i = S_i - (q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$

Si hacemos $S_1 = \ldots = S_n = S$ queda $G_i = S(1-(q(E_1) + \ldots + q(E_n)))$

Vemos que si $q(E_1) + \ldots + q(E_n) > 1$, eligiendo $S>0$ se tiene $G_i < 0$.

y si $q(E_1) + \ldots + q(E_n) < 1$, eligiendo $S<0$ se tiene $G_i < 0$ para todo i.

Por lo tanto para que haya coherencia debe ser

$q(E_1) + \ldots + q(E_n) = 1$.

Axioma 2$\rightarrow$ Coherencia.

Tenemos $q(E_1) + \ldots + q(E_n) = 1$ y $G_i = S_i - (q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$.

$$G_1 = S_1 - (q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$
$$G_2 = S_2 - (q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$
$$\vdots$$
$$G_n = S_n - (q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$

Multiplicamos la i-ésima ecuación por $q(E_i)$:

$$q(E_1)\,G_1 = q(E_1)\,S_1 - q(E_1)\,(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$
$$q(E_2)\,G_2 = q(E_2)\,S_2 - q(E_2)(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$
$$\vdots$$
$$q(E_n)\,G_n = q(E_n)\,S_n - q(E_n)(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$

[Axioma 2→ Coherencia}.

Multiplicamos la i-ésima ecuación por $q(E_i)$:

$$q(E_1)\, G_1 = q(E_1)\, S_1 - q(E_1)\,(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$

$$q(E_2)\, G_2 = q(E_2)\, S_2 - q(E_2)(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$

$$\vdots$$

$$q(E_n)\, G_n = q(E_n)\, S_n - q(E_n)(q(E_1)S_1 + \ldots + q(E_n)S_n)$$

Sumando (verlo en el pizarrón) se obtiene

$$q(E_1)\, G_1 + q(E_2)\, G_2 + \ldots + q(E_n)\, G_n = 0$$

Como $q(E_1), q(E_2), \ldots, q(E_n) \geq 0$ y suman 1, al menos uno de ellos es estrictamente mayor que cero. Entonces si todas las ganancias fueran negativas, tendríamos una contradicción con la última ecuación.

Axioma 3: $P(E \cap F) = P(E/F)P(F)$

Para trabajar con este axioma debemos definir *cociente de apuesta condicional*.

Definición: q(E/F), llamado *cociente de apuesta para E dado F* es el cociente de apuesta que un apostador tiene a favor de E en el entendimiento de que la apuesta se anula así como todos los intercambios monetarios si F no ocurre.

Axioma 3: $P(E \cap F) = P(E/F)P(F)$

Coherencia $\rightarrow$ Axioma 3.

Supongamos que el apostador tiene cocientes de apuestas $q(E \cap F)$, $q(E/F)$ y $q(F)$, para los cuales se eligen los respectivos premios $S(E \cap F)$, $S(E/F)$ y $S(F)$.

Tenemos 4 casos, en los cuales las ganancias del apostador son:

Coherencia → Axioma 3.

Ocurre	**E y F**	**F y no E**	**E y no F**	**ni E ni F**
Apostador paga	$q(E\cap F)S(E\cap F)+q(E/F)S(E/F)+q(F)S(F)$	$q(E\cap F)S(E\cap F)+q(E/F)S(E/F)+q(F)S(F)$	$q(E\cap F)S(E\cap F)+q(F)S(F)$	$q(E\cap F)S(E\cap F)+q(F)S(F)$
Apostador cobra	$S(E\cap F)+S(E/F)+S(F)$	$S(F)$	0	0
Apostador gana	$S(E\cap F)[1-q(E\cap F)]+S(E/F)[1-q(E/F)]+S(F)[1-q(F)]$	$-q(E\cap F)S(E\cap F)-q(E/F)S(E/F)+S(F)[1-q(F)]$	$-q(E\cap F)S(E\cap F)-q(F)S(F)$	$-q(E\cap F)S(E\cap F)-q(F)S(F)$

Coherencia $\rightarrow$ Axioma 3.

Observamos que la tabla anterior se reduce a:

Ocurre	**E y F**	**F y no E**	**no F**
Apostador paga	$q(E\cap F)S(E\cap F)+$ $q(E/F)S(E/F)+q(F)S(F)$	$q(E\cap F)S(E\cap F)+$ $q(E/F)S(E/F)+$ $q(F)S(F)$	$q(E\cap F)S(E\cap F)+$ $q(F)S(F)$
Apostador cobra	$S(E\cap F)+S(E/F)+S(F)$	$S(F)$	0
Apostador gana	$G_1=$ $S(E\cap F)[1-q(E\cap F)]+$ $S(E/F)[1-q(E/F)]+$ $S(F)[1-q(F)]$	$G_2=$ $-q(E\cap F)S(E\cap F)$ $-q(E/F)S(E/F)$ $+S(F)[1-q(F)]$	$G_3=$ $-q(E\cap F)S(E\cap F)$ $-q(F)S(F)$

Según el axioma, tenemos que probar que para que el apostador sea coherente debe ser $q(E\cap F)= q(E/F)q(F)$.

Tenemos que las ganancias son:

$$G_1=S(E\cap F)[1-q(E\cap F)]+S(E/F)[1-q(E/F)]+S(F)[1-q(F)]$$

$$G_2=-q(E\cap F)S(E\cap F)-q(E/F)S(E/F)+S(F)[1-q(F)]$$

$$G_3=-q(E\cap F)S(E\cap F)-q(F)S(F)$$

$G_1 = S(E \cap F)[1 - q(E \cap F)] + S(E/F)[1 - q(E/F)] + S(F)[1 - q(F)]$

$G_2 = -q(E \cap F)S(E \cap F) - q(E/F)S(E/F) + S(F)[1 - q(F)]$

$G_3 = -q(E \cap F)S(E \cap F) - q(F)S(F)$

Entonces si se elige $S(E \cap F)=1$, $S(E/F)=-1$, $S(F)=-q(E/F)$ tenemos:

$G_1 = [1 - q(E \cap F)] - [1 - q(E/F)] - q(E/F)[1 - q(F)] = -q(E \cap F) + q(E/F)q(F)$

$G_2 = -q(E \cap F) + q(E/F) - q(E/F)[1 - q(F)] = -q(E \cap F) + q(E/F)q(F)$

$G_3 = -q(E \cap F) + q(E/F)q(F)$

O sea que las ganancias del apostador son negativas a menos que $q(E/F)q(F) \geq q(E \cap F)$. Tomando $S(E \cap F)=-1$, $S(E/F)=1$, $S(F)=q(E/F)$, queda que las ganancias son negativas a menos que $q(E/F)q(F) \leq q(E \cap F)$. Esto demuestra que para que haya coherencia es necesario que $q(E/F)q(F)=q(E \cap F)$.

La demostración del recíproco de este último resultado es bastante más tediosa y no la veremos aquí. Figura en las páginas 63 y 64 de «Philosophical Theories of Probability» de Gillies.

El Argumento Dutch Book

El Argumento Dutch Book no debe confundirse con el teorema del mismo nombre. El teorema es un resultado matemático establecido más allá de toda controversia.

El Argumento Dutch Book es un argumento a favor del probabilismo, o sea, de que los grados de creencia de un agente deben conformar los axiomas de la teoría de la probabilidad. Obviamente, los axiomas de la teoría y la definición de cociente de apuesta **implican** el **teorema** Dutch Book, pero un teorema matemático **carece de implicaciones normativas**, y el Argumento Dutch Book las tiene.

El argumento Dutch Book es un argumento **por interpretación.** Se interpretan los **grados de creencia** como **cocientes de apuesta**, se utiliza el TDB para mostrar que estos son **coherentes** si y solo si satisfacen los axiomas de la probabilidad, y se equipara **racionalidad** con **coherencia**.

1- (PREMISA) Las creencias no son absolutas, cuestiones de todo o nada, sino que presentan **grados.**

2- (PREMISA) El **grado de creencia** de un agente en una proposición es el **cociente de apuesta** del agente a favor del suceso que se da si y solo si la proposición es verdadera.

3- (PREMISA **justificada por TDB**) Un agente está expuesto a una pérdida segura si y solo si tiene cocientes de apuesta que no verifican los axiomas de la Teoría de la probabilidad.

4- Por 2 y 3, un agente está expuesto a una pérdida segura si y solo si tiene grados de creencia que no verifican los axiomas de la Teoría de la probabilidad.

5- (PREMISA) Todo agente racional evita estar expuesto a una pérdida segura.

6- Por 4 y 5, todo agente racional tiene grados de creencia que verifican los axiomas de la teoría de la probabilidad.

El Argumento Dutch Book representa un fortísimo apoyo a la teoría subjetiva de la probabilidad, por lo menos frente a la teoría rival que hemos visto hasta ahora: la teoría lógica.

En la teoría lógica, los axiomas de la probabilidad debían ser intuidos como leyes generales de la medida de apoyo lógico parcial entre proposiciones.

En la teoría subjetiva, a través del Argumento Dutch Book, los axiomas de la probabilidad surgen como **condiciones de racionalidad** de los agentes, no deben ser intuidos.

El Argumento Dutch Book es, por supuesto, tremendamente discutido. Se discute:

- Su premisa 2 (*El grado de creencia de un agente en una proposición es el cociente de apuesta del agente a favor del suceso que se da si y solo si la proposición es verdadera*).
- Su premisa 3 (*Un agente está expuesto a una pérdida segura si y solo si tiene cocientes de apuesta que no verifican los axiomas de la Teoría de la probabilidad*). Esta premisa se discute en el sentido de que un agente **podría** tener grados de creencia violatorios de los axiomas de la probabilidad y sin embargo no estar expuesto a una pérdida segura, por ejemplo, si Dios le revelara a favor de qué debe apostar.

- Su premisa 5 (*Todo agente racional evita estar expuesto a una pérdida segura*). Hay quienes consideran que la cuestión pragmática de ganar o perder dinero no tiene nada que ver con la racionalidad, sino que es algo que en último término depende de otras características del agente. Además, se ha argumentado que optar por la estrategia que evita pérdidas seguras también evita ganancias seguras. Y finalmente se ha argumentado que el argumento presupone omnisciencia por parte de ambos agentes, que lo normal es hacer consideraciones sobre la sagacidad de quien propone el premio S.

- El Argumento Dutch Book es uno de los pilares del Bayesianismo, que propugna la condicionalización de los grados de creencia según el teorema de Bayes. Pero esto involucra una situación dinámica y los Argumentos de tipo Dutch Book diacrónicos enfrentan particulares dificultades.
- Finalmente, cuando se plantean Argumentos de tipo Dutch Book tomando toda la potencia de los axiomas de Kolmogorov (esto es, considerando espacios muestrales infinitos y por lo tanto conjuntos infinitos de cocientes de apuestas) aparecen dificultades propias de esta situación.