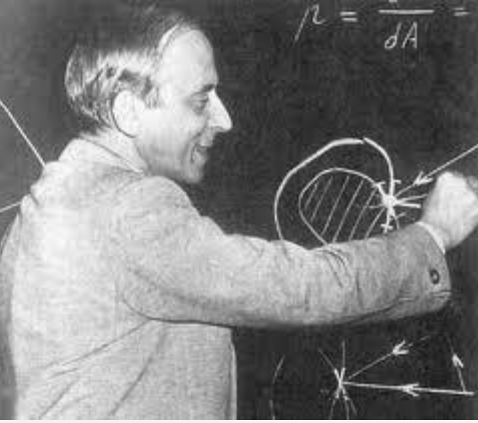
TEORÍA FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

(Gillies)

- En el siglo XIX apareció la teoría frecuencial de la probabilidad en Cambridge (Inglaterra), siendo Venn uno de sus principales exponentes. Esto puede ser considerado una reacción del «empirismo británico» al «racionalismo continental» de Laplace.
- En el siglo XX ganó popularidad con el Círculo de Viena (aunque se ha tendido a ver al Círculo de Viena como un movimiento monolítico, nada más lejos de la realidad. Con respecto a teorías de la probabilidad ya sabemos que Carnap sostuvo la teoría lógica).
- Entre 1922 y 1936 la teoría se desarrolló en el continente europeo pero con la dispersión del Círculo de Viena, su desarrollo pasó nuevamente a los países de habla inglesa.



Richard Von Mises

Hans Reichenbach

- La teoría frecuencial fue desarrollada principalmente por estos dos pensadores, que estuvieron muy ligados al Círculo de Viena. La versión de Reichenbach aparece en su libro «The Theory of Probability» de 1949.
- La de Von Mises fue publicada en un paper de 1919 que tiene el hermoso nombre de «Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung», en un libro de 1928 titulado «Probability, Statistics and Truth», y en uno póstumo de 1964, «Mathematical Theory of Probability and Statistics». (De este último hay versión en español en la Facultad de Ciencias).

Estudiaremos, siguiendo a Gillies, la versión de Von Mises.

Teoría lógica: la teoría de la probabilidad es una rama de la Lógica, una extensión de la lógica deductiva al caso inductivo.

Teoría subjetiva: La teoría de la probabilidad concierne a los grados de creencia de individuos particulares.

Hemos visto que históricamente, la teoría frecuencial está fuertemente asociada con el empirismo. Por lo tanto, no es raro enterarnos de que para la teoría frecuencial,

la teoría de la probabilidad es una ciencia matemática, como la mecánica, que trata acerca de otro rango de fenómenos observables.

«La idea esencialmente nueva que apareció alrededor de 1919 (aunque en alguna medida había sido anticipada por A. A. Cournot en Francia, John Venn en Inglaterra y Georg Helm en Alemania) fue considerar a la teoría de la probabilidad como una ciencia del mismo orden que la geometría o la mecánica teórica».

Von Mises

¿Cuál es el objeto de esa ciencia?

«… así como el objeto de la geometría es el estudio de los fenómenos espaciales, así la teoría de las probabilidades trata con fenómenos masivos y eventos repetitivos».

Von Mises

Seguramente haya mucha gente que no esté de acuerdo con lo que dice Von Mises sobre la geometría, y sería mejor pensar la analogía con la mecánica. Desde este punto de vista, la teoría de la probabilidad es una ciencia matemática como la mecánica pero en vez de tratar con los movimientos y estados de equilibrio de cuerpos y con las fuerzas que actúan sobre ellos, trata con

«problemas en los cuales o bien el mismo evento se repite una y otra vez, o un gran número de elementos uniformes están involucrados al mismo tiempo»

Von Mises

Contraste con la teoría subjetiva

El énfasis en las repeticiones y en los grandes números establece un marcado contraste con la teoría subjetiva, la que permite que individuos específicos asignen probabilidades a eventos particulares.

Para la teoría frecuencial la probabilidad **está asociada con colecciones de eventos u otros elementos** y se considerará **objetiva e independiente del individuo que la estime**, del mismo modo que las masas de los cuerpos en mecánica son independientes de la persona que las mida.

Ejemplos de Von Mises de eventos repetitivos y fenómenos masivos.

Se pueden dividir en tres categorías:

1. **«juegos de azar»,** en los que se trata por ejemplo con largas secuencias de tiradas de un dado particular.
2. **Estadística «de la vida» o «biológica».** Por ejemplo, podemos tratar con el conjunto de los varones uruguayos que tienen 40 años de edad en 2012 o con un conjunto de plantas en un terreno determinado.
3. **Situaciones que se dan en física,** como la consideración de las moléculas de una muestra de gas particular.

Espacio de atributos

- En todos los ejemplos, un «atributo» particular ocurre a cada uno de los «elementos» que conforman el conjunto de eventos repetitivos o fenómeno masivo, pero ese atributo varía de un elemento a otro.
- Por ejemplo, en cada tirada del dado ocurre «1», u ocurre «2», …, u ocurre «6»; cada uno de los varones uruguayos o bien muere antes de llegar a los 41 años o bien los cumple; las plantas en el terreno dan una cierta cantidad de grano, y finalmente cada una de las moléculas del gas tiene una cierta velocidad.
- Con cada evento repetitivo o fenómeno masivo tenemos asociado un conjunto de atributos que consideramos posibles a priori. Estos forman lo que Von Mises llama «espacio de atributos».

Espacio de atributos

El espacio de atributos, que se denota usualmente como Ω, es un concepto introducido por Von Mises que se encuentra en todas las presentaciones modernas de la teoría de la probabilidad, con el nombre de «espacio muestral».

Este último nombre es mucho peor que el de *espacio de atributos* porque Ω es un conjunto de resultados posibles, y nada nos asegura que al tomar una muestra vamos a tener todos los elementos de Ω. Estrictamente hablando Ω consiste de **atributos elementales**, porque cualquier subconjunto de Ω es un atributo o resultado posible. En el caso del dado los atributos son 1,2,…,6, y «ser par» o sea, {2,4,6} es un atributo no elemental.

Colectivos

Von Mises introdujo este término para describir eventos repetitivos o fenómenos masivos de las clases vistas. Un colectivo

«denota una secuencia de eventos o procesos uniformes que difieren por ciertos atributos observables, como colores, números o alguna otra cosa».

Existe una distinción entre **colectivos empíricos** y **colectivos matemáticos**. Los colectivos empíricos existen en el mundo real y pueden ser observados. Un ejemplo podría ser una secuencia de tiradas de una moneda particular llevada a cabo en la mañana de un día particular en un lugar particular. Otro ejemplo podría ser las moléculas de gas en un recipiente en un laboratorio particular en un momento particular. Obviamente los colectivos empíricos son finitos. Los colectivos matemáticos por otro lado, consisten en una secuencia infinita $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ de elementos de Ω.

Los problemas de la relación entre colectivos empíricos y matemáticos.

Un colectivo matemático está **ordenado**. Si se consideran las tiradas de una moneda no hay problema porque estas también están ordenadas, pero si se consideran las moléculas de un gas o las plantas de un terreno, no hay un orden natural en ellas, no ocurren en una sucesión particular. Podemos numerar cada elemento de un colectivo empírico y así ordenarlos, pero la hacerlo **se asume implícitamente que el orden impuesto no afectará los resultados obtenidos.**

Los problemas de la relación entre colectivos empíricos y matemáticos.

Un colectivo matemático, que es infinito, se utiliza para representar un colectivo empírico que tiene una gran cantidad de elementos. ¿Es legítima esta representación de conjuntos grandes por conjuntos infinitos?

Von Mises afirma que sí, que es algo omnipresente en la física. En mecánica por ejemplo, se representan cuerpos con partículas puntuales, curvas geométricas representan líneas con grosor definido, se considera a veces la materia como un continuo, etc. (Gillies apunta que un antiguo profesor de él decía: «En física, 'en el infinito' significa 'del otro lado del laboratorio'».

Los problemas de la relación entre colectivos empíricos y matemáticos.

Von Mises argumenta que intenta presentar la teoría de la probabilidad como una ciencia matemática del tipo de la mecánica, pero que no es razonable esperar que la pueda hacer más rigurosa que la mecánica. Si la representación de lo finito por lo infinito se considera satisfactoria en mecánica, seguramente debe serlo en probabilidad. Admite que las secuencias infinitas, las curvas geométricas, etc. son idealizaciones o abstracciones matemáticas de la realidad empírica, pero afirma que son necesarias para que la representación matemática de la realidad sea tratable.

«Se ha intentado construir geometrías en las cuales no existen líneas ‘infinitamente angostas’ sino solo de un ancho definido. Los resultados fueron magros porque este método es mucho más difícil que el usual. Más aun, una banda de ancho definido es solamente otra abstracción, no mejor que una línea recta…»

Von Mises

Relación entre teoría y observación en una ciencia matemática según Von Mises.

Fenómeno observable (Ej: colectivo empírico) → Abstracción o idealización → Concepto matemático (Ej: colectivo matemático)

Leyes empíricas → Abstracción o idealización → Axiomas matemáticos

↓ deducción

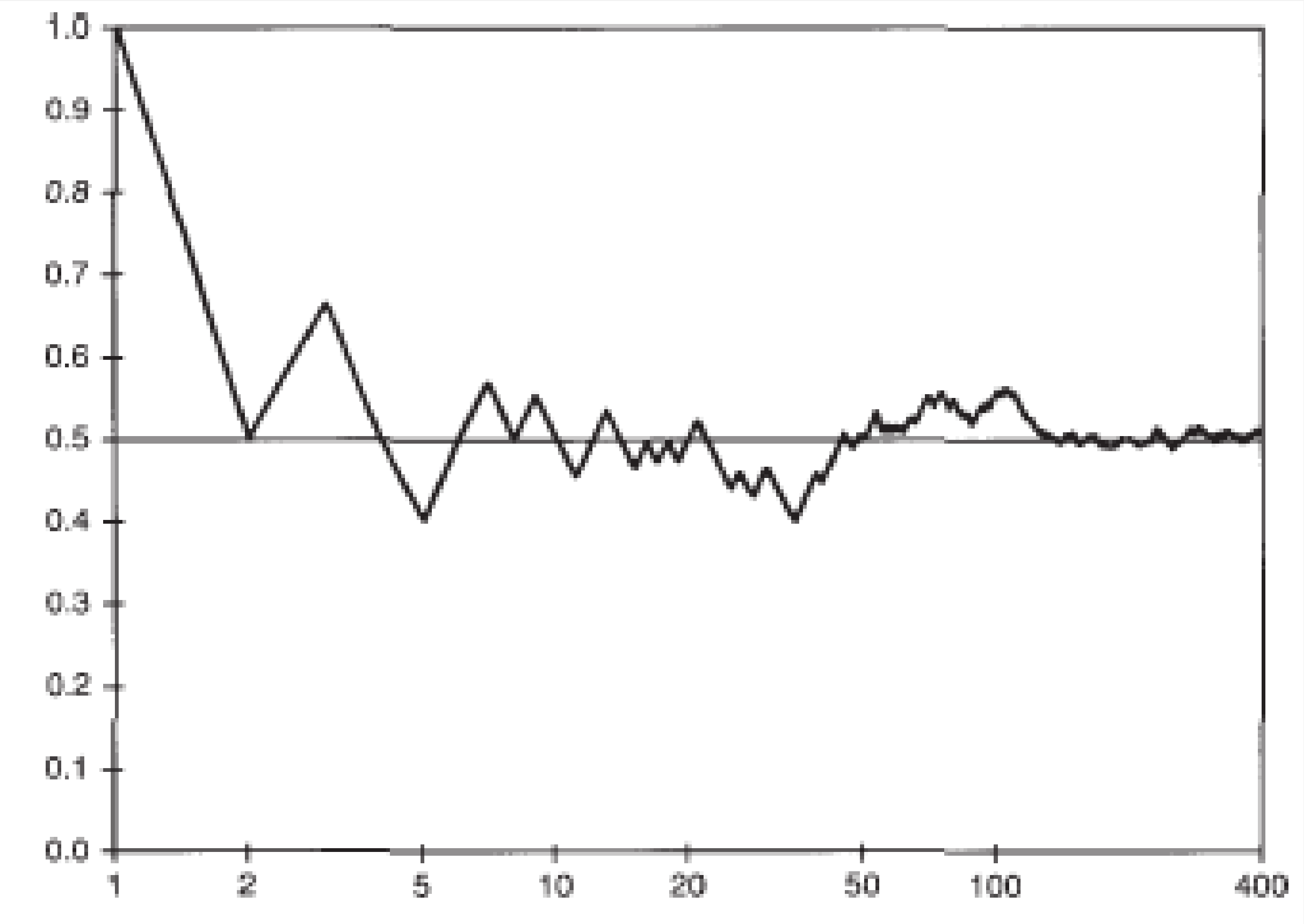
Otros fenómenos observables ← Explicación o predicción ← Consecuencias

Las leyes empíricas de la probabilidad

Según Von Mises hay dos leyes empíricas que se cumplen para colectivos empíricos. La primera es la ***estabilidad creciente de la frecuencias estadísticas***. Según él este es el «'fenómeno primario' de la teoría de la probabilidad».

«Es esencial para la teoría de la probabilidad que la ***experiencia*** *ha mostrado que en el juego de dados, así como en los otros fenómenos masivos que hemos mencionado, las frecuencias relativas de ciertos atributos se vuelven más y más estables en tanto el número de observaciones se incrementa».*

Evidencia empírica para la ley de estabilidad



¿Empiria o deducción matemática?

«Si se calcula la frecuencia relativa de 'cara' con exactitud hasta la primera cifra decimal, no sería difícil obtener constancia en esta primera aproximación. De hecho, tal vez después de unos 500 juegos, esta primera aproximación llegará al valor 0,5 y no cambiará de ahí en adelante. Nos tomará mucho más tiempo llegar a un valor constante para la segunda aproximación calculada con dos cifras decimales… Tal vez se requerirá más de 10000 tiradas para mostrar que ahora esa segunda cifra también deja de cambiar y permanece igual a cero, de manera que la frecuencia relativa permanece siendo constantemente 0,50».

¿Es esto el resultado de una observación efectivamente hecha o está traficando Von Mises con la ley de los grandes números?

¿Empiria o deducción matemática?

De hecho, las diferentes versiones de la ley de los grandes números sugieren presentaciones mucho más precisas que lo que se puede abstraer de la experiencia (porque la matemática nos indica la velocidad de convergencia) de manera que parece que la relación entre observación y teoría en este caso se invierte. La ley de los grandes números predice una velocidad de convergencia y esto puede ser contrastado a partir de observaciones.

La segunda ley empírica

La ley de estabilidad era muy conocida antes de Von Mises. La segunda ley es debida a él. Hablando de sus predecesores en la teoría frecuencial dice:

«Estos intentos, …, no llevaron, y no podían llevar, a una teoría completa de la probabilidad porque fallaron en advertir una característica decisiva de los colectivos…»

Esta característica de los colectivos empíricos es la falta de orden o **aleatoriedad.**

La segunda ley empírica

Supongamos que estamos frente a una secuencia de tiradas de monedas, que por algún motivo es la siguiente:

C,N,C,N,C,N,C,N,C,… y siempre así, después de una cara, un número y después de un número, una cara. Von Mises considera que esto no es un colectivo genuino, porque la secuencia está perfectamente determinada. Los colectivos genuinos no están ordenados.

¿Cómo formular una ley que excluya el orden de los colectivos?

Ley de exclusión de sistemas de juego.

La idea de Von Mises es relacionar la aleatoriedad con la inexistencia de «martingalas» o «sistemas de juego». Un sistema de juego para el casino podría ser: «juegue a colorado después de que hayan salido cuatro negros seguidos». A lo largo del tiempo, infinidad de esos sistemas han sido probados. Sin embargo

«Los autores de todos esos sistemas han tenido, tarde o temprano, la triste experiencia de encontrar que ningún sistema puede mejorar sus chances de ganar en el largo plazo, o sea, de afectar las frecuencias relativas en las cuales diferentes colores o números aparecen en una secuencia seleccionada de la secuencia total del juego».

Ley de exclusión de sistemas de juego.

O sea, no solo las frecuencias relativas se estabilizan alrededor de valores particulares, sino que esta estabilización alrededor de esos valores se da en cualquier subsucesión elegida a partir de alguna regla de la sucesión total.

«En este punto una analogía se impone por si misma y la discutiré brevemente. Los fanáticos de los sistemas que van a Montecarlo muestran un parecido obvio con otra clase de ‘inventores’ cuya inútil labor es mirada por nosotros con cierta compasión. Estoy hablando de la antigua y aun viva familia de constructores de máquinas de movimiento perpetuo».

Ley de exclusión de sistemas de juego.

Así como los fracasos de todos los intentos de construir una máquina de movimiento perpetuo es una excelente evidencia a favor de la ley de la conservación de la energía, los fracasos de los sistemas de juego proveen una evidencia excelente para la ley empírica de aleatoriedad.

He hecho, sin embargo, un descubrimiento que parece cierto: en la sucesión de las probabilidades fortuitas hay no un sistema, sino algo parecido a un orden... Lo que, sin duda, es extraño.

Por ejemplo, que los doce últimos números salen después que los doce del centro, supongamos dos veces. Luego vienen los doce primeros, a los cuales siguen de nuevo los doce del centro, que salen tres o cuatro veces alineados. Después de esto vienen los doce últimos, lo más a menudo dos veces. Luego son los doce primeros, que no se dan más que una. De este modo la suerte designa tres veces los doce del centro, y así seguidamente durante una hora y media o dos horas. ¿No es curioso esto?

Tal día, una tarde por ejemplo, ocurre que el negro alterna continuamente con el rojo. Esto cambia a cada instante, de forma que cada uno de los dos colores no sale más que dos o tres veces seguidas. Al día siguiente, o a la misma tarde, el rojo sale solo, jugada tras jugada, por ejemplo, hasta veintidós veces seguidas, y continúa, así, infaliblemente, durante algún tiempo. Algunas veces un día entero.

Dostoyevski, *El jugador*

En una entrevista, le preguntaron al multimillonario John Paul Getty si había jugado a la ruleta alguna vez. Respondió:

«Si hubiera querido jugar, me hubiera comprado un casino».

La definición de probabilidad como límite de frecuencia.

Según habíamos visto en el esquema, una vez introducidas las dos leyes empíricas, el siguiente paso en el programa de von Mises es obtener los axiomas por abstracción o idealización.

Leyes empíricas → Abstracción o idealización → Axiomas matemáticos

Para la ley de estabilidad: axioma de convergencia.

- **Axioma de convergencia:**

Sea A un atributo arbitrario de un colectivo C.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n} \quad \text{existe}$$

Se **define** la **probabilidad de A en C** (notado P(A/C)) como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n}$.

Se observa que, al igual que en la teoría lógica, todas las probabilidades son condicionales. Es este uno de los pocos puntos en común entre ambas teorías. Con todo, hay diferencias.

- En la **teoría lógica**, la probabilidad de una hipótesis siempre es condicional a una evidencia.
- En forma similar, en la **teoría subjetiva**, la probabilidad de un evento es condicional al individuo que le asigna un cociente de apuesta, y por lo tanto al conjunto de creencias del individuo.
- En la **teoría frecuencial** las probabilidades son condicionales, pero no a evidencias o conjuntos de creencias sino a un colectivo particular en el cual se toma en consideración un atributo particular.

Es este un modo de caracterizar la diferencia entre interpretaciones epistemológicas y objetivas de la probabilidad.

Críticas a la definición de la probabilidad como límite de frecuencias.

Una crítica es que excluye muchas situaciones importantes en las que usamos la probabilidad pero no puede definirse un colectivo empírico.

«Parte de la plausibilidad de la teoría de Venn se deriva, creo, de que no se han reconocido los estrechísimos límites de su aplicabilidad».

Keynes

Von Mises dice que eso es una **ventaja** de su teoría:

«Nuestra teoría de la probabilidad no tiene nada que ver con cuestiones tales como '¿hay una probabilidad de que Alemania entre en guerra en algún momento futuro con Liberia?'»

Afirma que las probabilidades solo se pueden introducir en un sentido matemático o cuantitativo cuando hay un gran conjunto de eventos uniformes y urge a seguir su máxima «PRIMERO EL COLECTIVO, DESPUÉS LA PROBABILIDAD»

Hay que reconocer que el deseo de Von Mises de limitar las aplicaciones de la probabilidad parece tener un elemento de sana profilaxis.

El matemático e historiador de la matemática Isaac Todhunter (1820-1884) registra los siguientes cálculos llevados a cabo por Condorcet:

- Probabilidad de que la duración total de los reinados de los siete reyes de Roma fuese de 257 años: 0,000792.
- Probabilidad de que fuese de 140 años: 0,008887
- Probabilidad de que el augur Accius Naevius cortase una piedra con una navaja: 0,000001.

Von Mises relaciona esto con algunas teorías generales acerca de la evolución de la ciencia. Cita las siguientes palabras de Lichtenberg: «*Toda nuestra filosofía es una corrección del uso común de las palabras*».

Según Von Mises podemos empezar con conceptos imprecisos del lenguaje ordinario pero cuando construimos una teoría científica, debemos reemplazarlo por conceptos más precisos. Además, él cree que esos conceptos precisos deben ser introducidos a través de **definiciones explícitas**. Un ejemplo típico es la palabra «trabajo». Lo mismo que pasa en física con esta palabra pasa con probabilidad. Es beneficioso excluir algunos usos vagos de «probabilidad» que no son apropiados para un tratamiento matemático.

«'La probabilidad de ganar una batalla', por ejemplo, no tiene lugar en nuestra teoría de la probabilidad porque no podemos pensar un colectivo al cual pertenezca. La teoría de la probabilidad no se puede aplicar a este problema más que lo que el concepto físico de trabajo se puede aplicar al cálculo del 'trabajo' hecho por un actor al recitar su parte en una obra»

(Von Mises).

Desde el punto de vista histórico, esta idea de Von Mises es muy valiosa, ya que en el tiempo en que fue expresada (1928) el único método para evaluar probabilidades aparte de las frecuencias observadas era el principio de indiferencia, y se sabía que este llevaba a paradojas.

Sin embargo, al empezar la década del treinta aparecieron los primeros papers defendiendo la teoría subjetiva y esto dio un método para medir probabilidades como grados de creencia en una forma que permitía derivar los axiomas a partir de la condición de coherencia. Así se mostró que era posible extender el cálculo cuantitativo de probabilidades a casos en los que no hay colectivo sin caer en paradojas.

Otra crítica a la teoría frecuencial es que no está claro cuál es su rol en el problema de la inducción y la confirmación.

«Si se atribuye a la teoría de la probabilidad un valor filosófico esencial, este valor solo puede ser el que resulta de asignarle la tarea de profundizar, explicar o justificar el razonamiento por inducción. No es esto lo que hace Von Mises…»

De Finetti (1936)

Von Mises responde que efectivamente esa es una consecuencia de su teoría. En el prefacio a la tercera edición –de 1950- a la tercera edición alemana de 1928 dice:

«Según el punto de vista básico de este libro, la teoría de la probabilidad es, ella misma, en su aplicación a la realidad, una ciencia inductiva; sus resultados y fórmulas no pueden servir para fundamentar el proceso inductivo como tal, y mucho menos proveer valores numéricos para la plausibilidad de cualquier otra rama de la ciencia inductiva, digamos, la teoría general de la relatividad».

Acerca de la tesis de que los conceptos de la ciencia matemática deben ser explícitamente definidos

Obviamente, se puede considerar que la *probabilidad* es un concepto primitivo, caracterizado por los axiomas de su teoría.

«…algunos autores intentan introducir un sistema de axiomas directamente basado en las propiedades de las frecuencias. El principal exponente de esta escuela es Von Mises…, quien define la probabilidad de un evento como el ***límite de la frecuencia v/n*** *de ese evento cuando n tiende a infinito. La existencia de ese límite, en sentido estrictamente matemático, se postula como el primer axioma de la teoría. Aunque indudablemente una definición de ese tipo es muy atractiva a primera vista, involucra ciertas dificultades matemáticas que le quitan buena parte de su simplicidad aparente. Además, esa definición de probabilidad involucra una mezcla de elementos empíricos y teóricos, lo que normalmente se evita en las teorías axiomáticas modernas. Es por ejemplo, comparable a definir un punto geométrico como el límite de una mancha de tiza de dimensiones infinitamente decrecientes, lo que usualmente no se hace en la geometría axiomática moderna.»*

Cramer (1946)

No tenemos una respuesta de Von Mises a esta crítica, pero seguramente hubiese dicho que si bien hay nociones primitivas, en una ciencia empírica –a diferencia de la matemática- esas nociones primitivas deben recibir definiciones operacionales en términos de observables.

«La frecuencia relativa de la repetición es la ‘medida’ de la probabilidad, tanto como la altura de una columna de mercurio es la ‘medida’ de la temperatura».

Von Mises (1950)

Von Mises: devoto discípulo de Mach

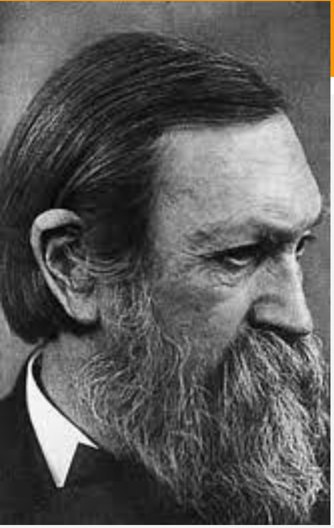
Esta idea operacionalista de Von Mises es tomada, con reconocimiento explícito del físico decimonónico Ernst Mach.

«La mejor información concerniente… al problema general de la formación de conceptos en las ciencias exactas puede encontrarse en E.MACH… El punto de vista adoptado en este libro corresponde esencialmente a las ideas de MACH».

Von Mises, 1928 (nota la pie)

En 1938, Von Mises dedica un artículo a la filosofía de Mach y en 1940, en un resumen de uno de sus propios libros escribe:

«El autor es un devoto discípulo de Mach»



Ernst Mach (1838-1916)

En 1883 Mach publicó un libro titulado *The Science of Mechanics*: *A Critical and Historical Account of its Development.*

En él criticaba los tratamientos de la mecánica newtoniana porque según él no daban cuenta adecuadamente del concepto de masa, e intentó subsanar ese defecto proponiendo una definición operacional de masa en términos de observables.

Von Mises modeló su presentación de la probabilidad sobre esta presentación de la mecánica.

Críticas al operacionalismo

Hoy día la mayor parte de los filósofos de la ciencia prefieren una relación diferente entre conceptos teóricos y observacionales. Ya no se cree ampliamente que los conceptos teóricos deban ser directamente definidos en términos de observables.

Una de las principales críticas a la teoría frecuencial es que está basada en una filosofía operacionalista de las ciencias naturales, algo que es inadecuado.

Según el operacionalismo, los conceptos teóricos de la ciencia natural deben ser definidos en términos de conceptos observables, o dinámicamente, a cada nuevo concepto introducido en una ciencia natural se le debe dar una definición operaciónal en términos de procedimientos observacionales o experimentales

Críticas al operacionalismo

Así, por ejemplo, la longitud puede introducirse especificando un procedimiento de medida con barras rígidas graduadas (reglas).

Primer problema: Una única definición operacional en general no es suficiente para todas las aplicaciones del concepto. En nuestro ejemplo, con una regla puedes medir tu altura, tu mesa, la cuadra donde está tu casa, tal vez la distancia de tu casa al almacén, pero seguramente no se puede medir la distancia entre dos cumbres de montaña, ni la distancia de tu casa al sol ni el diámetro de un átomo.

Para resolver este problema se necesitaría una secuencia de definiciones operacionales.

Críticas al operacionalismo

Segundo problema: Supongamos que introducimos una secuencia de definiciones operacionales para un mismo concepto teórico. Por ejemplo, para poder medir distancias entre cumbres de montañas agregamos que *longitud es también lo que podemos medir así y asá con un teodolito*.

Por supuesto que ambas definiciones operacionales deben coincidir en donde se solapan. Pero además, el problema más grave es que el uso del teodolito necesita de supuestos **teóricos**. Por ejemplo, se debe asumir que los rayos de luz siguen trayectorias rectas en un espacio euclidiano. Habría que chequear esa suposición antes de usar el teodolito, pero esto es imposible sin medir longitudes del orden de las que han hecho necesaria la introducción del teodolito.

Críticas al operacionalismo

Tercer problema: Supongamos que se inventa el teodolito. Cualquiera diría que se ha descubierto un método **más exacto** para medir longitudes de determinado orden.

Para el operacionalismo, esta forma de hablar es inadmisible. Después que se ha definido un método como la distancia entre dos marcas de una barra, no tiene sentido decir que se encontraba un método de medida más exacto que el que proporcionan las barras.

Críticas al operacionalismo

Cuarto problema: Supongamos que hemos definido la longitud en términos de una barra metálica. Para medir longitudes en la práctica, deberíamos estar seguros la barra está a una temperatura estándar o introducir factores de corrección.

Un día de calor una barra metálica se dilata, y un experimentador mide un objeto de madera que había medido previamente. El experimentador postula que la barra de medida se ha expandido más que el objeto de madera. Enfría la barra a una temperatura estándar y muestra que el objeto de madera efectivamente se expandió algo en vez de contraerse. Pero nada de esto tiene sentido en el marco operacionalista. La única forma de salvar el problema es que se introdujesen las posibles correcciones en la propia definición operacional.

Pero es claro que para el operacionalista los conceptos involucrados en las correcciones deben, ellos mismos estar definidos operacionalmente. El círculo vicioso se ha hecho presente.

«Contra este punto de vista (el operacionalismo), se puede mostrar que ***las medidas presuponen teorías****. No hay medida sin teoría y ninguna operación puede ser satisfactoriamente descripta en términos no teóricos. Los intentos de hacer esto siempre son circulares; por ejemplo, la descripción de la medida de longitud necesita una teoría (rudimentaria) de las medidas de calor y temperatura; pero estas, a su vez, involucran medidas de longitud».*

(Para una alternativa al operacionalismo, ver Gillies, p.140-145)

Críticas a la definición de probabilidad como límite de frecuencias

Se supone que esta definición es una definición operacional de un concepto teórico (la probabilidad) en términos de uno observable (la frecuencia).

Se puede aducir que sin embargo no conecta la observación con la teoría debido al uso del concepto matemático de *límite*. Dos sucesiones puede tener los mismos n primeros términos para cualquier n finito y aun así converger a límites muy diferentes. Puedo tirar una moneda 10 millones de veces, obtener una frecuencia p para la salida de cara pero esto es compatible con que el límite de la sucesión de un supuesto colectivo infinito de tiradas que empieza con mis 10 millones de tiradas sea muy distinto de p.

Von Mises responde a esto diciendo que la representación de los finito por lo infinito es omnipresente en la física matemática. Consideremos cómo se define la densidad de un fluido en un punto P.

Para hacer esto se toma un pequeño volumen δV alrededor del punto P, que contiene una masa δM del fluido. La densidad ρ del fluido en P se define como $\lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta M}{\delta V}$

Esto parece tener un paralelo exacto con la definición de límites de frecuencia de Von Mises excepto que aquí consideramos cantidades tan pequeñas como se quiera. Es más, se puede decir que la situación en mecánica de fluidos es aun peor que en probabilidad porque los fluidos no son continuos sino que están compuesto de moléculas.

Por eso, cuando δV es suficientemente pequeño como para contener unas pocas moléculas, los valores de δM fluctuarán violentamente debido al movimiento browniano.

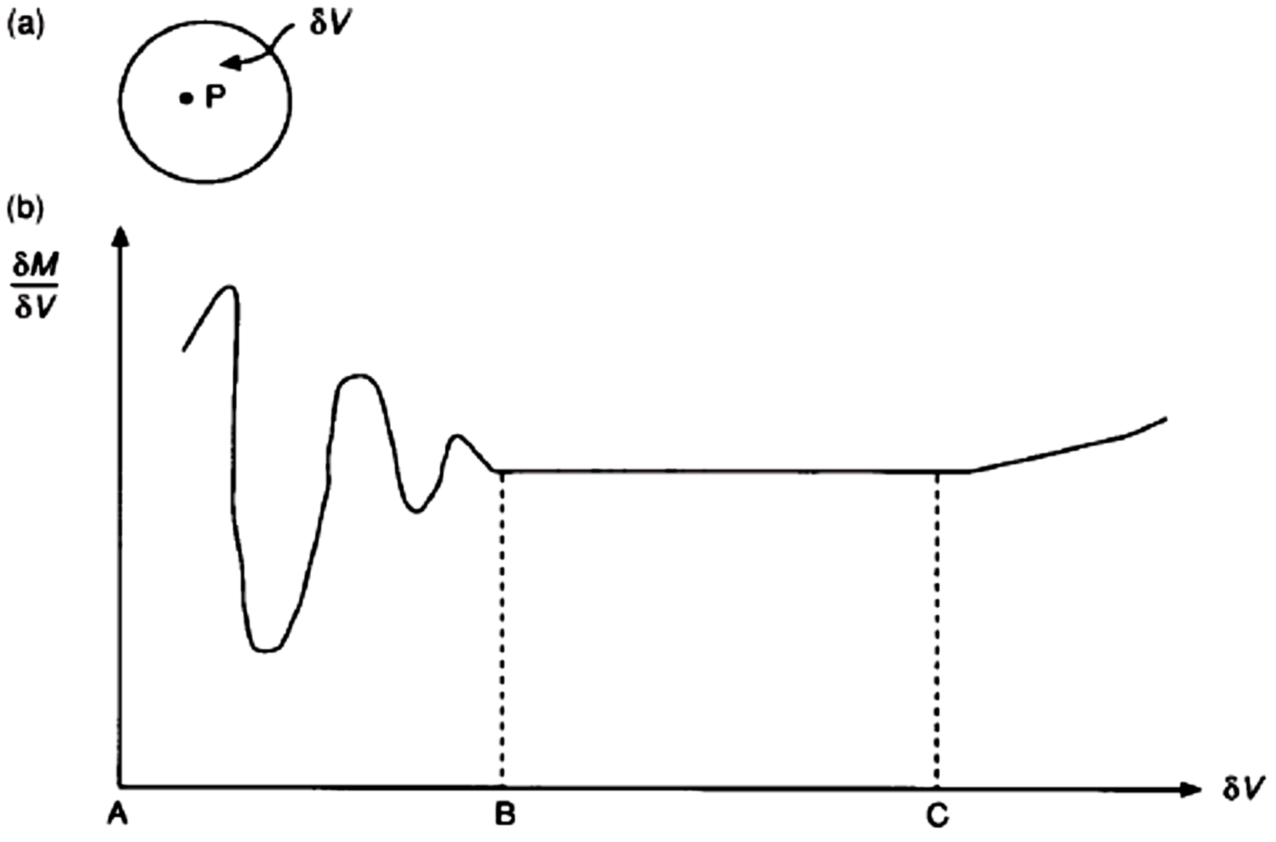


Figure 5.3 Definition of the density ρ at a point P in a fluid

Es de esperar que, si tiramos una moneda una cantidad arbitrariamente grande de veces, esta se nos haga añicos. Sin embargo es indiscutible que los límites se usan y generalmente se consideran no problemáticos en mecánica.

Así Von Mises concluye:

«…Los resultados de una teoría basada en la noción de colectivo infinito se pueden aplicar a secuencias finitas de observaciones en una forma que no se puede definir lógicamente, pero es, sin embargo, suficientemente exacta en la práctica. La relación de la teoría con la observación, en este caso, es esencialmente la misma que en todas las otras ciencias físicas»

Parece que Von Mises ha respondido adecuadamente, pero

«Frecuentemente se piensa que se puede escapar a estas objeciones observando que la imposibilidad de hacer precisas las relaciones entre probabilidades y frecuencias es análoga a la imposibilidad práctica que se encuentra en todas las ciencias experimentales de relacionar exactamente las nociones abstractas de la teoría con las realidades empíricas. Desde mi punto de vista la analogía es ilusoria: en las otras ciencias uno tiene una teoría que asegura y predice con certeza y exactitud lo que sucedería si la teoría fuese completamente exacta; en el cálculo de probabilidad es la teoría misma la que nos obliga a admitir la posibilidad de todas las frecuencias. En las otras ciencias la incertidumbre surge de la conexión imperfecta entre la teoría y los hechos; en nuestro caso, por el contrario, no tiene origen en esta conexión sino en el cuerpo de la teoría misma…»

De Finetti (1937)

El punto de De Finetti es claro: la teoría de la probabilidad nos asegura, a través de la ley de los grandes números que el apartamiento de la frecuencia observada y la probabilidad no será mayor que un número dado **con una cierta probabilidad**.

La aleatoriedad

La ley empírica de la exclusión de los sistemas de juego, burdamente expresada dice que es imposible mejorar las chances de ganar a través de un sistema de juego.

El problema es formular una versión de esto para colectivos matemáticos que constituya el segundo axioma de la teoría matemática.

Esto no es fácil. Para verlo planteemos una versión ingenua del axioma, que parece muy natural pero no funciona.

Axioma fallido de aleatoriedad

Sea C un colectivo matemático con espacio de atributos Ω que satisface el primer axioma. Entonces, para cualquier atributo A $\subseteq \Omega$ tenemos P(A/C)=$\lim_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n}$

Definimos un **sistema de juego** como una regla para seleccionar una subsucesión C’ de C. El sistema de juego es exitoso si el límite de la frecuencia $\frac{m(A)}{n}$ en C’ es diferente a su valor en C. Si fuese mayor, apostaríamos a favor de A en C’ y, si fuese menor, en contra de A en C’.

En vista de esto la versión ingenua y errónea del axioma diría: en toda subsucesión C’ obtenida del colectivo original C a través de un sistema de juego (regla de selección), $\frac{m(A)}{n}$ debe converger a su valor original en C.

El problema con esta versión del axioma es que hace vacía la clase de los colectivos. Porque si tenemos un atributo A con probabilidad no extrema, por el primer axioma 1 debe aparecer un número infinito de veces en el colectivo. Y por lo tanto podemos elegir una subsucesión que consiste exactamente de los lugares donde aparece el atributo A. Pero para esta subsucesión la probabilidad de A es 1.

Por esto, se debe restringir la clase de los sistemas de juego de alguna manera. El problema es cómo hacerlo.

Von Mises sugiere

«la cuestión de si un cierto miembro de la secuencia original pertenece a la secuencia parcial debe especificarse ***independientemente del resultado*** *de la observación correspondiente, esto es, antes de que se sepa cualquier cosa acerca del resultado».*

Esto es muy razonable pero inútil. Para establecer un axioma matemático se deben usar conceptos matemáticos y no se puede traer a consideración la cuestión de si alguien conoce o no conoce los primeros n miembros de un colectivo particular.

De hecho, Von Mises siempre enfatizó la necesidad de separar lo matemático de lo empírico. Además hay otro factor que presiona por la aparición de una formulación matemática del axioma de aleatoriedad. Este otro factor es que Fry y Cantelli objetaron que, cualquier formulación adecuada del axioma de aleatoriedad contradiría el axioma de convergencia y por lo tanto haría inconsistente la teoría. Para probar la consistencia de la teoría se necesita una formulación precisa del axioma de aleatoriedad usando conceptos estrictamente matemáticos.

(No disponemos de tiempo para ver la crítica de Fry y Cantelli, que puede ser adecuadamente refutada. Se encuentra en la p. 106 de Gillies)

El problema de dar un adecuado axioma de aleatoriedad fue atacado por mucha gente, y finalmente resuelto por Wald y Church.

Wald considera el problema en 1937 y 1938. No intenta definir una clase permisible de sistemas de juego, sino más bien de examinar el efecto de elegir esta clase en formas diferentes. Su teorema principal al respecto dice lo siguiente: si consideramos solamente una clase numerable de sistemas de juego entonces existe un infinito de la potencia del continuo de colectivos que tienen cualquier distribución de probabilidad asignada.

Entonces las sucesiones aleatorias, en vez de ser raras son mucho más numerosas que la que exhiben regularidad. Esto deja cierta arbitrariedad en la elección de la clase de los sistemas de juego pero Wald hace dos consideraciones acerca de esto.

Primero en cualquier problema particular no necesitamos considerar más que un conjunto numerable de sistemas de juego. Segundo, si formulamos nuestra teoría en un sistema lógica estándar, solo podremos definir un conjunto numerable de reglas matemáticas.

Esta última observación de Wald dio pie a Church para aplicar su teoría de las funciones recursivas al problema.

Digamos que una función es ***computable*** si su valor para cada argumento puede computarse en tiempo finito usando un método mecánico que se ha dado previamente. Esto es un concepto informal, y definirlo matemáticamente es un problema. La tesis de Church es que las funciones recursivas son exactamente las funciones computables.

Hay una enorme cantidad de evidencia a favor de la tesis de Church. En su paper *On the Concept of a Random Sequence* (1940) ataca el problema surgido en la teoría frecuencial de Von Mises.

«Entonces un Spielsystem (sistema de juego) debería representarse matemáticamente no como una función, ni siquiera como la definición de una función, sino como un algoritmo efectivo para el cálculo de los valores de una función»

Esto es obviamente correcto: Un sistema de juego es una regla con la que se elige si apostar o no, y que resuelve en tiempo finito esto, tomando en cuenta los anteriores resultados (o no). Un sistema que haga esto –si la tesis de Church es correcta-, se debe implementar con funciones recursivas y será llamado **sistema recursivo.**

Así se puede establecer el segundo axioma en la forma siguiente:

Sea C un colectivo para el que vale el axioma de convergencia. Sea A un atributo cualquiera de C para el cual P(A/C)=$\lim_{n\to\infty}\frac{m(A)}{n}$**=p. Sea C' una subsucesión de C elegida por un sistema de juego recursivo. Entonces en C',** $\lim_{n\to\infty}\frac{m(A)}{n}$ **existe y es igual a p.**

Se puede probar que ambos axiomas dan lugar a una teoría consistente.

Como punto interesante, los matemáticos constructivistas están obligados a rechazar la existencia de colectivos matemáticos. Para ellos, lo único que existe es aquello para lo cual se puede proveer una construcción algorítmica, y claramente no hay construcciones algorítmicas de colectivos.

Relación entre los axiomas de Kolmogorov y los de Von Mises

El hecho que los axiomas de Kolmogorov son derivables de los de von Mises es bastante simple de probar y se deja como ejercicio.

Es de notar que el axioma de aditividad numerable no es derivable de los axiomas de Von Mises. Este es el único punto en el que De Finetti está de acuerdo con Von Mises en su artículo de 1936: *Statistics and Probability in R. Von Mises' Conception.*

«Y para terminar esto quiero hacer notar el acuerdo acerca de un teorema particular: la extensión del teorema de la probabilidad total a clases numerables, lo que es sostenido por muchos autores, no está justificada ni según la teoría de Von Mises ni según mi punto de vista»