

## Primeira nota sobre as controvérsias em torno da prova do Teorema das Quatro Cores: um panorama *à la* Prawitz

---

Gisele Dalva Secco

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

[gisele.secco@ufrgs.br](mailto:gisele.secco@ufrgs.br)

---

**Abstract:** I present an overview of the philosophical controversies surrounding the Four-Color Theorem proof based on Dag Prawitz presentation of the disputes. My aim is to delineate a critic of Prawitz reading by pointing out some elements capable of complementing his presentation.

**Key words:** Four-Color Theorem; computer-assisted proofs; Prawitz.

**Resumo:** Apresento o panorama das divergências filosóficas concernentes à prova do Teorema das Quatro Cores a partir daquele fornecido por Dag Prawitz, buscando delinear elementos que o complementem.

**Palavras-chave:** Teorema das Quatro Cores; Provas Assistidas por Computador; Prawitz.

O Teorema das Quatro Cores (T4C) enuncia, seja em vocabulário próprio à topologia ou à combinatória,<sup>1</sup> que todo mapa sob certas condições pode ser colorido com apenas quatro cores sem que qualquer região adjacente seja colorida com a mesma cor. A prova é uma *reductio ad absurdum* cuja assunção inicial é a existência de pelo menos um mapa que exige cinco cores para ser colorido, do qual se pressupõe ser o menor, i.e., que seja *minimal*. A *reductio* inclui uma prova por casos: a aplicação dos assim chamados métodos de

---

<sup>1</sup>A versão topológica do teorema enuncia: “Para todo mapa existe uma quatro-coloração admissível.” (Fritsch, R. e Fritsch, G. *The Four-Color Theorem*. Trad. Julie Peschke. New York/ Heidelberg/ Berlin: Springer Verlag, 1998, p. 86). Na versão combinatória: “Todo grafo planar possui uma quatro-coloração de vértice admissível”. (*op. cit.*, p. 149)

reducibilidade permite construir um conjunto de configurações do qual todo mapa cinco-coloreável deve conter ao menos uma (donde se diz deste conjunto que é *inevitável*). Mostra-se, assim, que o mapa inicial pode ser ainda menor, sendo falsa a assunção de que o mapa cinco-coloreável escolhido é minimal: existe um *conjunto inevitável de configurações redutíveis*. A construção de um tal conjunto resolve-se com três casos, um dos quais requer mais de mil subcasos – praticamente impossíveis de serem construídos, a não ser através do recurso à execução de um programa computacional.

A principal razão pela qual esta prova suscitou interesse nas comunidades matemática e filosófica é a participação indispensável de computadores em sua construção. Quanto aos membros da comunidade matemática, as respostas ao resultado<sup>2</sup> compartilham, por um lado, críticas quanto à aparente falta de estrutura (e mesmo de elegância) da prova – um aspecto diretamente relacionado à natureza combinatória da solução. Por outro lado, os matemáticos envolvidos mais diretamente com teoria dos grafos sustentaram, desde o aparecimento das primeiras críticas, que o tipo de complexidade calculatória ou computacional da prova não difere daquele presente em outras provas nesse domínio da matemática.<sup>3</sup>

As controvérsias filosóficas em torno da prova do T4C não conservam o caráter sistematizado de uma *disputatio*. A cidadania filosófica do procedimento foi adquirida por intermédio do famigerado artigo de Thomas Tymoczko sobre o

---

<sup>2</sup> A prova do T4C foi publicada por K. Appel e W. Haken em 1977. O anúncio da obtenção do resultado encontra-se em Appel, K. e Haken, W. "Every planar map is four colorable" (Research announcements). *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 82, n. 5, 1976, pp. 711 – 12.

<sup>3</sup> Elas podem ser divididas (de acordo com Swart, E. R. "The Philosophical Implications of the Four-Color Problem". *The American Mathematical Monthly*, v. 87, n. 9, 1980, pp. 697 – 707) em três partes: "(i) O estabelecimento do fato de que o teorema é verdadeiro dado um determinado conjunto de grafos, configurações, ou – em geral – casos que possuam (ou circunstancialmente não possuam) uma propriedade estipulada; (ii) A obtenção de uma lista exhaustiva desses casos; (iii) A confirmação de que todos os membros desse conjunto possui a propriedade requerida. O conjunto finito de casos referidos pode, em um dos extremos, ser tão pequeno e tão simples que o teste de casos pode ser feito em nossas cabeças ou pode, no outro extremo, ser tão extenso e/ou complicado que é impossível de ser levado a cabo sem o auxílio de um computador." (Swart, 1980, p. 699)

significado filosófico da prova do T4C.<sup>4</sup> Elabora-se ali o que denominamos de *argumento da introdução da experimentação na matemática via T4C* (AIE). Resumidamente, o AIE parte da constatação de que a prova do T4C não pode ser verificada passo a passo por uma única pessoa no tempo de uma vida humana – passa pela associação dessa característica com o uso de computadores, entendidos como qualquer outro instrumento utilizado em experimentos científicos – para concluir que o conceito tradicional de prova matemática precisa ser modificado de modo a abarcar a possibilidade de erro constitutiva de processos experimentais.

Variando o grau de atenção aos detalhes deste argumento, respostas ao AIE são até hoje produzidas.<sup>5</sup> O objetivo desta nota é apresentar parcialmente um panorama dessas respostas com base na estratégia de apresentação empregada por Dag Prawitz. Em texto relativamente recente,<sup>6</sup> ao pretender dar conta de questões conceituais relacionadas a dois fenômenos – provas assistidas por computador e provas *sobre* computadores –, Prawitz acaba tecendo algumas considerações sobre o AIE de modo a fornecer um panorama das posições disputantes das controvérsias. Seu quadro é composto pelo grupo dos que afirmam e o dos que negam a ocorrência de uma mudança significativa nas práticas matemáticas a partir da prova do T4C. Como é de se esperar Tymoczko é alocado no primeiro grupo. O segundo grupo divide-se em dois: o dos que negam (Teller, 1980) e o dos que afirmam que a ocorrência de procedimentos empíricos, tal como se alega ser o uso de computadores na prova do T4C, não representa qualquer novidade relevante nas práticas matemáticas (Detlefsen e Luker, 1980). No caso de Teller isso se deve ao fato de que os elementos empíricos que se podem identificar no procedimento de prova de Appel e Haken não possuem um papel próprio na prova. No segundo, porque a presença de tais

---

<sup>4</sup> “The four-color problem and its philosophical significance”. *The Journal of Philosophy*, Vol 27, nº 2, 1979, pp. 57 – 83.

<sup>5</sup> Cf. McEvoy, M. “Experimental mathematics, computers and the a priori”. *Synthese*, vol 190, issue 3, 2013, pp. 397 – 412.

<sup>6</sup> “Proofs Verifying Programs and Programs Producing Proofs: A Conceptual Analysis”. *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectiveness of Proof*. Berlin/Helderberg/New York: Springer, 2008, pp. 81 – 94.

elementos não seria novidade em práticas matemáticas. Atentemos ao modo como tais textos, primeiro o de Teller e depois o de Detlefsen e Luker, respondem pela negação do AIE e os conceitos principais que mobilizam para tal.

Teller identifica uma confusão de Tymoczko entre *provar* teoremas, ou seja, *verificar se* uma asserção determinada é consequência das premissas assumidas na derivação, e o ato de *verificar que* um determinado objeto é uma prova. Nesse sentido tudo o que a prova do T4C traria de novidade para a matemática consistiria na utilização de computadores na verificação e não na execução da prova. Destarte, enquanto a posse de uma prova é, para Prawitz, a condição a ser satisfeita para *a asserção de um teorema*, a verificação de uma prova é o pré-requisito de uma asserção distinta: a de que *um determinado objeto* que se analisa é de fato uma prova. A verificação de uma prova, desse modo, não acrescentaria nada à prova mesma mas somente, distinta questão, à nossa confiança de que ela é efetivamente uma prova.

Prawitz afirma que a distinção entre provas e verificação de provas é importante, embora não implique numa imediata resposta à questão acerca da novidade da prova do T4C. Isso porque nem Tymoczko nem Teller “dizem muito” sobre o conceito de prova.<sup>7</sup> Prawitz pretende contribuir para uma análise do mesmo sugerindo que mais importante do que se perguntar pelo que são provas é preciso buscar determinar o que é *ter provado* uma asserção, ou seja, o que é *estar de posse* de uma prova. Está-se de posse de um procedimento de prova, para Prawitz, quando se é capaz de aplicar ou realizar uma *operação* sobre bases dadas, que transforma tais bases na conclusão.

---

<sup>7</sup> Deve-se observar que a leitura de Prawitz compartilha diversos pressupostos e movimentos argumentativos com a crítica do professor Oswaldo Chateaubriand à abordagem tradicional de provas matemáticas, tal como apresentada no segundo volume de *Logical Forms*. Uma comparação adequada entre essas duas perspectivas não será desenvolvida aqui. Ela está esboçada no quinto capítulo de nossa tese de doutoramento *Entre Provas e Experimentos: uma leitura wittgensteiniana das controvérsias em torno na prova do Teorema das Quatro Cores*. Rio de Janeiro. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013. Orientador: Luiz Carlos Pereira.

Acionando a distinção entre provas como atos, objetos e traços<sup>8</sup> pode-se dizer que ao aceitar a importância da distinção de Teller entre provar e verificar provas é como se Prawitz estivesse dizendo que *provas como atos* exigem a capacidade de executar uma operação de transformação de bases dadas em uma conclusão, enquanto que as *provas como objetos* só são plenamente acessíveis para quem as realiza (algo como: só podemos ter um mapa completo de um caminho que realizamos). Daí a importância que atribui a perguntas como “O que é ter provado um teorema?” O que é ter realizado o ato de construção da conclusão a partir das bases? Perguntas que se podem compreender como contraposição à pergunta pelo que são provas como objetos, que parece anular o processo de transformação de bases que constitui o ato de provar.

Quanto ao T4C, por conseguinte, Prawitz afirma que embora seja justificável afirmar a possibilidade *em princípio* de provar dedutivamente (no domínio *a priori*) o lema chave de redutibilidade, as bases para uma tal afirmação residem, em última instância, no domínio empírico. Prawitz concorda com a ideia de que podemos “provar dedutivamente *que o programa* utilizado pelo computador para derivar o lema chave *é correto*, mas não podemos provar dedutivamente *que o computador executou o programa corretamente*” (Prawitz, 2008, p. 91, grifos nossos). Com isso, vemos retornar a ideia de Tymoczko de que há fundamentos parcialmente indutivos ou empíricos para o T4C. Isso porque para Prawitz a verificação *via* execução do mesmo programa em máquinas diferentes conta como evidência meramente empírica.

Devemos portanto concluir que as bases que temos para asserir o T4C não são do tipo tradicional em matemática, mas de tipo parcialmente indutivo, repousando como está na observação do resultado da execução de um programa particular em um computador, fornecendo evidência empírica para a existência da prova do lema chave. (*loc. cit.*)

Gostaríamos de sugerir, como um contraponto à posição de Prawitz, que mesmo a asserção de que o computador executou o programa corretamente pode ser considerada como de certo modo constituindo o domínio *do a priori*:

---

<sup>8</sup> Sugerida por Göran Sundholm em “Questions of proof”. *Manuscrito*, vol. XVI (2), out. 1993, pp. 47 – 70.

essa verdade empírica funcionaria, no *setting* dedutivo da prova do T4C, como princípio metodológico, como condição de possibilidade da prova do T4C.<sup>9</sup> Qualquer pessoa que tenha compreendido a prova em certo grau de detalhe, e que por conseguinte seja capaz de reproduzi-la com o mesmo nível de pormenor – quer dizer, que seja capaz de mostrar as relações internas entre os conceitos que a constituem, ou a relação de fundamentação da conclusão nas premissas, como quer Prawitz – está tão capacitada/fundamentada a asserir o T4C quanto os *experts* que a verificaram. O próprio Prawitz reconhece que, com relação a teoremas difíceis, “coletivamente estamos de posse de provas dedutivas” (Prawitz, 2008, p. 92), sejam elas computacionalmente auxiliadas ou não, pois contamos com a *expertise* dos verificadores na fundamentação de nossa confiança.

É preciso observar, entretanto, que Prawitz utiliza uma expressão limitativa antes da afirmação: é “apenas” coletivamente que estamos de posse de provas dedutivas de teoremas difíceis – individualmente, possuímos evidência empírica. Talvez se pudesse dizer, com Oswaldo Chateaubriand, que se trata de um dos aspectos sociológicos das provas<sup>10</sup>: o convencimento com relação à efetividade de uma prova depende das relações de confiança epistêmica entre os membros da comunidade matemática, que contém auditórios (de especialistas) capazes de verificar as provas e na qual os demais auditórios (especialistas de outras áreas) confiam. Quem está de posse de um procedimento efetivo de transformação passo a passo das premissas na conclusão da prova – os verificadores – é capaz de garantir àqueles que só podem reproduzir a prova em menor grau de detalhe computacional que os

---

<sup>9</sup> De uma perspectiva wittgensteiniana poderíamos dizer: do *sentido* matemático do enunciado do T4C. Para a abordagem funcional do *a priori* cf. Pap, A. “The different kinds of a priori”. *The Philosophical Review*. Vol. 53, n. 5, 1944, pp. 465 – 484, bem como *The A Priori in Physical Theory*. New York: King's Crown Press; London: G. Cumberlege, 1946.

<sup>10</sup> Algo que, seguindo a Lassalle Casanave, associamos a aspectos de ordem retórico-dialética. Cf. Lassalle Casanave, A. “La concepción de demostración de Oswaldo Chateaubriand”. *Manuscrito – Logic Language and Knowledge – Essays in Honour of Oswaldo Chateaubriand Filho*, vol. XXII, n. 2, Outubro, 1999, pp. 95-107; “Entre la retórica y la dialéctica”. *Manuscrito – Logic Language and Knowledge – Essays on Chateaubriand's Logical Forms*, vol. 31 – n.1, Jan-Jun, 2008, pp. 11 – 18.



- de um processo que pode ser implementado em qualquer linguagem de programação)
- (c) que o agente computador execute corretamente o programa;
  - (d) que o resultado reportado seja efetivamente obtido.

E em seguida remetem a uma passagem do texto de Tymoczko, na qual ele afirma que:

O apelo a computadores, no caso do T4C, envolve duas alegações: (1) a de que toda configuração em  $U$  é redutível caso uma máquina com tais e tais características quando programada de tal e tal maneira produza um resultado afirmativo para [a redutibilidade de] cada configuração e (2) que tal máquina assim programada efetivamente produz resultados afirmativos para cada configuração. A segunda alegação é o resultado [*report*] de um experimento particular. Foi experimentalmente estabelecido que uma máquina de tipo  $T$ , quando programada por  $P$  resulta no output  $O$ . (Tymoczko, 1979, p. 73)

O argumento de Detlefsen e Luker sustenta, então, que a alegação (2) de Tymoczko equivale à sua alegação (d), de modo que deve valer para uma o mesmo que vale para a outra. Além disso, identificam (1) com (c), de modo que se (1) for uma crença empírica, também o será (c). Tymoczko efetivamente afirma, sem esclarecer, a relação entre ambos, dizendo que os fundamentos para (2) são “difusos” o suficiente como para que sejam considerados empíricos. Agora, claro, o que Detlefsen e Luker desejam concluir – que há fundamentos empíricos mesmo em provas tão tradicionais quanto a do jovem Gauss – não precisa necessariamente ser o caso se levarmos em consideração, ainda que de modo um tanto peremptório, duas observações. A primeira é a de que calcular ou computar não equivale sem mais a realizar um experimento. Já a segunda é a de que mesmo que consideremos os episódios de computação como “algum tipo de experiência”, eles poderiam muito bem ser tomados como elementos *funcionalmente a priori* no contexto da prova – os pressupostos “difusos” sobre a máquina sendo considerados princípios metodológicos da mesma. Desse modo, a conclusão dos autores (e, conseqüentemente a de Prawitz) acerca da constituição parcialmente empírica da prova do T4C não se sustentaria.

É nesse sentido que se poderia sugerir uma incompletude na abordagem de Prawitz: esclarecimentos acerca da natureza do cálculo e dos instrumentos

computacionais utilizados para realiza-los são necessários para que se possa determinar em que medida uma prova altamente calculatória como a prova do T4C pode ser legitimamente considerada um caso limite entre provas e experimentos. Em realidade, deve-se reconhecer, há um relativo comprometimento com o exame da natureza da computação no texto de Detlefsen e Luker. O contexto em que o manifestam é o apontamento para uma subjacente compreensão equivocada acerca da natureza da computação por parte de Tymoczko ou, mais precisamente, da natureza

da ‘elementaridade’ que caracteriza os passos de uma computação ou algoritmo. *Não* se exige dos passos de uma computação que sejam *matematicamente perspicuos*. Não se supõe que eles representem passos sobre os quais a clara luz da intuição matemática imprime sua marca de aprovação (embora, claro, eles possam fazê-lo). Contrariamente, supõe-se que sua ‘elementaridade’, consiste no fato de que representam uma tarefa puramente mecânica, puramente burocrática [*clerical*] que não envolve nenhuma engenhosidade, nenhuma inteligência. E é supostamente uma questão puramente mecânica, clérica, verificar se tal passo foi efetivamente executado. E entretanto existem operações puramente mecânicas, puramente burocráticas que se pode realizar [*to perform on*] com símbolos que *não* representam ou correspondem a operações elementares com as coisas as quais os símbolos são considerados representar. E cálculos ou computações, do modo como os tratamos, são tomados como conjuntos de regras para operar com símbolos, e não com as coisas as quais os símbolos podem ser considerados representar! (*loc. cit.*)

Ficaria assim iminente a passagem ao tópico da inspecionabilidade de provas em geral e da prova do T4C em particular, o que não analisaremos aqui. Diremos apenas que a premissa do AIE de Tymoczko na qual a noção de *surveyability* cumpre o papel fulcral de realizar a transição em direção à aceitação da introdução de elementos empíricos determinantes em provas matemáticas pode ser reescrita a partir de uma distinção entre dois sentidos da expressão: o sentido de inspecionabilidade (a verificabilidade individual de todos os passos calculatórios envolvidos na prova) e o sentido de sinopticidade (a inspeção da prova como um todo ou o “reconhecimento conceitual” de que os passos da prova ajustam-se em uma determinada ordem, que *estabelece* a

conclusão).<sup>11</sup> De posse dessa distinção seria legítimo afirmar que embora a prova do T4C não seja inspecionável ela é passível de representação sinóptica. Com isso, não se poderia concluir, como faz Tymoczko, pela hibridização entre provas e experimentos no caso da prova do T4C e talvez nem mesmo, como quer Prawitz, terminar por aceitar os cálculos computacionalmente executados como fundamentos parcialmente empíricos para a verdade do T4C.

Poder-se-ia observar, ademais, indícios de adequação dessas observações de Detlefsen e Luker ao contexto de discussões sobre as funções do conhecimento simbólico, ou seja, conhecimento adquirido pela manipulação regrada de signos. Afirmar, por exemplo, que os passos de um cálculo ou computação não precisam ser “matematicamente perspicuos” equivaleria a dizer que se trata justamente de *uma operação de manipulação simbólica cega*, à qual não corresponderia qualquer aspecto epistemicamente relevante como a compreensão de significado dos termos envolvidos.<sup>12</sup> Ora, se tais indícios forem fortes o bastante, talvez seja possível enriquecer o panorama afigurado por Prawitz, num sentido que nos permitiria melhor criticar sua posição quanto à presença de elementos empíricos na prova do T4C.

Para realizar o objetivo de complementar o *panorama à la Prawitz* sobre as controvérsias filosóficas em torno da prova do T4C, entretanto, teremos de direcionar o foco de atenção para uma região do mesmo que não constitui o quadro original. Trata-se da entrada em cena de elementos wittgensteinianos de filosofia da matemática, com a qual ocorre uma modificação de perspectiva no que tange à conclusão do AIE, uma vez que a tese da hibridização entre provas e experimentos de Tymoczko passa a ser considerada como uma possível ameaça ao

---

<sup>11</sup> Para a distinção entre *local surveyability* e *global surveyability* aqui acionada através do vocabulário *inspeccionabilidade* e *sinopticidade* cf. Bassler, O. B. “The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective”. In: *Synthese*, 148, 2006, pp. 99 – 133.

<sup>12</sup> Uma tentativa de delinear esta conexão foi realizada em Secco, G. D. “Conocimiento simbólico en la prueba del teorema de los cuatro colores”. *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico. Historia y teoría*. Esquisabel, O. M. & Sautter, F. T. (Eds.) Buenos Aires: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciarelli, 2013, pp. 37 – 48 (no prelo).

modo como Wittgenstein supostamente compreendia e valorizava a distinção entre provas e experimentos.

Na tentativa de salvar alguns dos mais profícuos *insights* da filosofia da matemática de Wittgenstein da alegada ameaça que a prova do T4C representaria para a mesma (sobretudo a ênfase na distinção crucial entre provas e experimentos), Stuart Shanker chega a uma conclusão muito mais radical que as de Tymoczko e Prawitz:<sup>13</sup> a supressão tanto do procedimento (a prova) como de seu resultado (o T4C) do âmbito das práticas matemáticas. Tratar-se-ia propriamente de um experimento.

Entre as posições apresentadas por Prawitz, incluindo-se a sua, e aquela que pretendemos sustentar, portanto, seria preciso interpor a abordagem wittgensteiniana de Shanker (e de ao menos um outro partidário de sua leitura)<sup>14</sup> para que o quadro a seguir fosse complementado com a apresentação dos argumentos cujas relações ele pretende apresentar:

---

<sup>13</sup> Em “The Appel-Haken solution of the Four-Colour Problem”. *Wittgenstein: Critical Assessments – Volume Three: from the Tractatus to Remarks on the foundations of mathematics*. London: Routledge, 1986, pp. 395-412; e em *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*. London: Croom Helm, 1987 (especialmente capítulo 4).

<sup>14</sup> Stillwell, S. “Empirical Inquiry and Proof”. *Proof and Knowledge in Mathematics*. New York: Routledge, 1992, pp. 110 – 134.

